

Egyenlőtlenségek

2025. szeptember 13., Kós Géza (kosgeza@gmail.com)

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség és változatai

•

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- Nemnegatív számokra

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)} \geq \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n}$$

avagy összegek mértani közepe legalább akkora, mint a mértani közepek összege

- Nemnegatív $a_1, \dots, a_n$ és pozitív $x_1, \dots, x_n$ esetén

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

(Engel-féle alak, Titu-lemma stb.)

Hölder egyenlőtlenség és változatai

- $p, q > 1$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$

$$(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{1/p} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{1/q} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

- $w_1, w_2 > 0$, $w_1 + w_2 = 1$; $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{w_1} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^{w_2} \geq a_1^{w_1} b_1^{w_2} + a_2^{w_1} b_2^{w_2} + \dots + a_n^{w_1} b_n^{w_2}$$

avagy összegek súlyozott mértani közepe legalább akkora, mint a súlyozott mértani közepek összege

- Ugyanezek több sorozattal (táblázatos Hölder)

Muirhead-egyenlőtlenség

Ha

- $x_1 \geq \dots \geq x_n \quad (\geq 0), \quad y_1 \geq \dots \geq y_n \quad (\geq 0), \quad x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n,$
- minden $1 \leq k < n$ -re $x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_k$ (az (x_i) sorozat "majorálja" az (y_i) sorozatot)
- $a_1, \dots, a_n > 0 \quad (\geq 0)$

akkor

$$A_{x_1, \dots, x_n} = (a_{\sigma(1)}^{x_1} \cdots a_{\sigma(n)}^{x_n}) \text{ \textit{átlaga az összes } \sigma \text{ permutációra} } \geq A_{y_1, \dots, y_n} = (a_{\sigma(1)}^{y_1} \cdots a_{\sigma(n)}^{y_n}) \text{ \textit{átlaga} }.$$

Schur-egyenlőtlenség

- Ha $x, y, z \geq 0$ és n pozitív egész, akkor

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-z)(y-x) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0.$$

- Ált1: Negatív n -re is igaz.
- Ált2: Ha $a, b, c \geq 0$ és $x, y, z \geq 0$ ugyanolyan vagy ellentétes sorrendben van rendezve, akkor

$$a(x-y)(x-z) + b(y-z)(y-x) + c(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Feladatok

F/1. Nesbitt-egyenlőtlenség (állatorvosi ló): Tetszőleges $a, b, c > 0$ számokra

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Közepek

F/2. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

(IMO 2001/2)

A $\sqrt{1+8x}$ alakú összegeket kellemetlen felülről becsülni. Alulról becsülni sokkal könnyebb lenne, pl. a súlyozott számtani-mértaniból $\sqrt{1+8x} \geq 3x^{4/9}$. Szorozzuk át a bizonyítandó egyenlőtlenséget, és emeljünk négyzetre, ezzel megszabadulunk a kellemetlen felső becslésektől.

Lineáris becslés

F/3. Legyenek a és b olyan pozitív valós számok, melyekre $a^2 + b^2 = \frac{2}{9}$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2-3a} + \frac{1}{2-3b} \geq 2.$$

(KöMaL C. 1751.)

F/4. Legyenek a, b, c és d olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $a + b + c + d = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq \frac{7}{2}.$$

(KöMaL B. 5289.)

Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij

F/5. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 1$, akkor

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2}.$$

(Ír versenyfeladat, 1999)

F/6. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ páronként különböző pozitív valós számok, melyekre fennáll, hogy

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$$

egész szám minden $n = 1, 2, \dots, 2023$ esetén. Mutassuk meg, hogy $a_{2023} \geq 3034$. (IMO 2023/4)

F/7. x, y, z pozitív számok. Biz.be:

$$\frac{2x^2 + xy}{(y + \sqrt{zx} + z)^2} + \frac{2y^2 + yz}{(z + \sqrt{xy} + x)^2} + \frac{2z^2 + zx}{(x + \sqrt{yz} + y)^2} \geq 1.$$

F/8. (*) Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ pozitív számok, amelyekre $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1^2 \cdot a_2 + a_2^2 \cdot a_3 + \dots + a_{100}^2 \cdot a_1 < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(IMO Shortlist 2007/A6)

A jobboldalon $\sqrt{2}/3 \approx 0,4714$, az éles érték 0.4514 körül van, ez egy olyan sorozattal érhető el, amikor egy viszonylag nagy érték gyorsan lecseng: $a_1 \approx 0,5873$, $a_2 \approx 0,6771$, $a_3 \approx 0,4224$, $a_4 \approx 0,1344$, $a_5 \approx 0,0133$, ...

A Cauchy–Schwarzból könnyű a $1/2$ felső becslés, de a javítás, bár az is csak Cauchy–Schwarzot használ, meglepően nehéz. A Shortlistben leírtam egy további javítást, amivel kb. 0.4589 jön ki.

Hölder

F/9. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c, d > 0$, és $a + b + c + d = 2$, akkor

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{a+b}} + \frac{b^{3/2}}{\sqrt{b+c}} + \frac{c^{3/2}}{\sqrt{c+d}} + \frac{d^{3/2}}{\sqrt{d+a}} \geq \sqrt{2}.$$

F/10. Az x, y, z pozitív számokra $xyz = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

(IMO feladatjavaslat, 1998)

Addig kell nézni, amíg rá nem jövünk, hogy a feladat triviális a táblázatos Hölderből.

Schur, Muirhead

F/11. Egy háromszög oldalainak hosszúsága a, b, c . Tegyük fel, hogy fennáll $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2c^2$.

Bizonyítandó, hogy a háromszög területe legfeljebb $\frac{3}{4}$, és egyenlőség csak az egyenlő oldalú háromszög esetében lehetséges. (KöMaL B. 5402.)

F/12. a, b, c pozitív számok. Biz.be:

$$\frac{1}{4a^2 - ab + 4b^2} + \frac{1}{4b^2 - bc + 4c^2} + \frac{1}{4c^2 - ca + 4a^2} \geq \frac{9}{7(a^2 + b^2 + c^2)}$$

F/13. Egy háromszög oldalai a, b, c . Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} \leq 3$$

(IMO Shortlist 2006/A5)